

微分方程式の基礎（常微分方程式）

——— 回路の過渡解析への応用（ラプラス変換使用せず）

2012/08/30

SimCircuit Technologies Co., Ltd.

- $y=f(x)$ という関数があった場合、 x を独立変数、 y を従属変数と呼ぶ。
- これから求めようとする関数である未知関数 y とその導関数 $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}, \dots$ と独立変数 x を含む方程式を微分方程式という。（これは、以下でいう常微分方程式の場合）
ここで、 $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}, \dots$ は、 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}, \dots$ を意味する。
- 独立変数が1個の微分方程式を常微分方程式（ODE：ordinary differential equation）、独立変数が2個以上ある微分方程式を偏微分方程式（PDE：partial differential equation）という。ここでは、常微分方程式のみ取り扱う。
- 微分方程式に含まれる最高階の導関数の階数をその微分方程式の階数（order）という。微分方程式の中で、未知関数 y の最も階数が高い導関数が $y^{(n)}$ であるならば、それは n 階微分方程式である。
- 微分方程式を満たす関数 $y=f(x)$ または $f(x,y)=0$ を、その微分方程式の解（solution）といい、解の関数を求めることを、微分方程式を解く（solve）という。ただし、解があっても簡単に既知の関数で表せない場合もあり、また通常、解は無数に存在する。
- 無数の解があるときの多くの場合、任意定数を使って解を一つの式で表すことができる。そのときの任意定数を使った解を、一般解という。通常、一般解は微分方程式の階数と同じ個数の独立な任意定数を含む。任意定数に条件を満たす特別な値を代入したときに得られる解を、特殊解（特解）という。また、任意定数にどんな値を代入しても得られない一般解に含めることができない解が、存在する場合がある。このような解を特異解という。
- 未知関数 y とその導関数 y', y'', y''', \dots について、1次方程式であるものを線形微分方程式という。
- $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), g(x)$ を x のみの関数とするとき、以下の形の微分方程式を n 階線形微分方程式という。

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \dots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = g(x)$$

- $f(x)$ を x のみの関数、 $g(y)$ を y のみの関数とすると、以下の形の微分方程式を変数分離形という。

$$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$$

- n 階線形微分方程式において、

定数項 $g(x) \equiv 0$ (常に値が0) のとき

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = 0 \quad \text{を同次方程式と}$$

定数項 $g(x) \neq 0$ のとき

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = g(x) \quad \text{を非同次方程式という。}$$

- 上記の最も簡単な例として、 $f(x)$, $g(x)$ を x のみの関数とすると、

1 階線形微分方程式 $y' + f(x)y = g(x)$ において、定数項 $g(x)$ の値により以下のように呼ばれる。

$g(x) \equiv 0$ のとき $y' + f(x)y = 0$ を同次方程式と いう。(これは変数分離形である)

$g(x) \neq 0$ のとき $y' + f(x)y = g(x)$ を非同次方程式と いう。

- 非同次方程式の一般解 = 同次方程式の一般解 + 非同次方程式の特殊解
の形で表される。

- $a_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ を定数、 $g(x)$ を x の関数としたとき、以下を n 階の定数係数線形微分方程式という。

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = g(x)$$

- 2階定数係数線形同次微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0$$

の一般解を、 $y = e^{sx}$ (s : 定数) と仮定したとき、これを上式に代入すると、

$$s^2 e^{sx} + a s e^{sx} + b e^{sx} = e^{sx} (s^2 + as + b)$$

これが0になれば、仮定した $y = e^{sx}$ が与式の解と言える。 $e^{sx} \neq 0$ なので

$$s^2 + as + b = 0$$

が成立すれば良い。与式に対応する上式を、特性方程式と呼び、解の判別に使用できる。

- 上記を n 階の定数係数線形微分方程式に拡張すると、 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ を定数、 y を x の関数としたとき微分方程式

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

の特性方程式は、

$$s^{(n)} + a_1 s^{(n-1)} + a_2 s^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

1 階線形微分方程式 $y'+f(x)y=g(x)$ の解き方													
変数分離形 $g(y)\frac{dy}{dx}=f(x)$ これは同次方程式 でもある	変数を左辺右辺に分離し、両辺をxで積分する。 $\int g(y)dy = \int f(x)dx$												
その他一般形 非同次方程式 $y'+f(x)y=g(x)$	解の公式で求める。 $y = \frac{1}{h(x)} \left\{ \int_p g(x)h(x)dx + C \right\} \quad (C : \text{任意定数})$ ただし $h(x) = e^{\int_p f(x)dx}$ $\left(\int_p f(x)dx \text{ は } f(x) \text{ の原始関数の一つを意味する} \right)$												
2 階微分方程式 $y''+f_1(x)y'+f_2(x)y=g(x)$ の解き方													
2 階定数係数線形 同次方程式 $y''+ay'+by=0$	特性方程式により、解の種類を判別し、定理に従う。 基本解と一般解は、以下のように求められる。 <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center;">特性方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$の解</th> <th style="text-align: center;">基本解の組</th> <th style="text-align: center;">一般解 (C_1, C_2 : 任意定数)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(i) 2つの実数解 $\lambda = \alpha, \beta$</td> <td style="text-align: center;">$\{e^{\alpha x}, e^{\beta x}\}$</td> <td style="text-align: center;">$y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$</td> </tr> <tr> <td>(ii) 重解 $\lambda = a$</td> <td style="text-align: center;">$\{e^{ax}, xe^{ax}\}$</td> <td style="text-align: center;">$y=C_1e^{ax}+C_2xe^{ax}$ $= (C_1+C_2x)e^{ax}$</td> </tr> <tr> <td>(iii) 共役複素数解 $\lambda = p \pm qi$</td> <td style="text-align: center;">$\{e^{px}\cos qx, e^{px}\sin qx\}$</td> <td style="text-align: center;">$y=C_1e^{px}\cos qx+C_2e^{px}\sin qx$ $= e^{px}(C_1\cos qx+C_2\sin qx)$</td> </tr> </tbody> </table>	特性方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ の解	基本解の組	一般解 (C_1, C_2 : 任意定数)	(i) 2つの実数解 $\lambda = \alpha, \beta$	$\{e^{\alpha x}, e^{\beta x}\}$	$y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$	(ii) 重解 $\lambda = a$	$\{e^{ax}, xe^{ax}\}$	$y=C_1e^{ax}+C_2xe^{ax}$ $= (C_1+C_2x)e^{ax}$	(iii) 共役複素数解 $\lambda = p \pm qi$	$\{e^{px}\cos qx, e^{px}\sin qx\}$	$y=C_1e^{px}\cos qx+C_2e^{px}\sin qx$ $= e^{px}(C_1\cos qx+C_2\sin qx)$
特性方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ の解	基本解の組	一般解 (C_1, C_2 : 任意定数)											
(i) 2つの実数解 $\lambda = \alpha, \beta$	$\{e^{\alpha x}, e^{\beta x}\}$	$y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$											
(ii) 重解 $\lambda = a$	$\{e^{ax}, xe^{ax}\}$	$y=C_1e^{ax}+C_2xe^{ax}$ $= (C_1+C_2x)e^{ax}$											
(iii) 共役複素数解 $\lambda = p \pm qi$	$\{e^{px}\cos qx, e^{px}\sin qx\}$	$y=C_1e^{px}\cos qx+C_2e^{px}\sin qx$ $= e^{px}(C_1\cos qx+C_2\sin qx)$											
2階定数係数線形 非同次方程式 $y''+ay'+by=g(x)$ ($g(x)$ は0でない)	非同次方程式の一般解= 同次方程式の一般解+非同次方程式の特殊解 上項の方法により同次方程式の一般解を求める。 特殊解は、未定係数法または定数変化法で求める。												

微分方程式と回路方程式の関係

定数項付き線形微分方程式 (非同次方程式)	回路方程式
同次方程式の一般解 v_t	過渡解 (自然応答) 定数項 (強制項) を0とした同次方程式を解く
非同次方程式の特解 v_s	定常解 (強制応答) $t \rightarrow \infty$ としたときの解 (求めたい電圧電流) を計算 インダクタは短絡、キャパシタは開放とする
非同次方程式の一般解 $v = v_t + v_s$ 任意定数は初期条件から決定する	完全解 = 過渡解 + 定常解 過渡解を求めたときに発生した任意定数は初期条件から決定する